



Nombres complexes

FICHE PROFESSEUR

Discipline : Mathématiques

Classe : Xe

Auteur : enseignants roumains de mathématiques

Niveau : A2

Thème du programme roumain : les nombres complexes

Ressources documentaires (et références) :

<http://xmaths.free.fr> , site de soutien et d'exercices de mathématiques

http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombres_complexes

Objectifs

Connaître la forme algébrique d'un nombre complexe (partie réelle, partie imaginaire, égalité, conjugué);

Représenter un nombre complexe dans un repère orthonormé, module, conjugué;

Faire des opérations dans \mathbb{C} ;

Opérer avec les puissances de i ;

Tâches

Identifier la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe;

Calculer le module d'un nombre complexe (avec la définition, en appliquant les propriétés);

Résoudre l'équation du 2nd degré dans \mathbb{C} .

Termes à expliquer :

Français	Roumain	A expliquer
Partie réelle	Parte reală	Termenul real (care nu conține i)
Partie imaginaire	Parte imaginară	Coeficientul lui i
Module	Modul	Distanța de la originea sistemului de axe la reprezentarea geometrică a numărului
Conjugué	Conjugat	Numărul complex care are aceeași parte reală cu numărul dat și partea imaginară opusă
Affixe d'un point du plan	Afixul unui punct din plan	

Mots clés : mathématiques, nombre complexe

Déroulement :

Le professeur révise les notions liées aux nombres complexes : forme algébrique, la représentation graphique d'un nombre complexe, opérations avec les nombres complexes, équations complexes.

Parcours :

Distribuer la fiche élève avec les énoncés des exercices.

Activité 1 :

Expliquer au moins deux méthodes de résolution et en appliquer une sur chacun des exercices.

Piste de correction :

a) $(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=1$ et $x_2=-1$

b) $(x+1)^2+1=0 \Rightarrow$ impossible en **R**. On peut insister donc sur la nécessité de l'introduction de l'ensemble des nombres complexes.

Activités 2 et 3 :

- * Énoncer la forme algébrique d'un nombre complexe ;
- * Préciser le critère d'égalité de deux nombres complexes.

Piste de correction : la résolution des exercices est évidente.

Activité 4 :

* Préciser les modalités de calcul pour les opérations suivantes avec des nombres complexes : l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'inverse d'un nombre complexe, les puissance de i .

Piste de correction :

$$c) s = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2009}$$

$$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i \Rightarrow i^{4k} + i^{4k+1} + i^{4k+2} + i^{4k+3} = 0$$

Au cadre, la somme ci-dessus, le dernier terme appartenant à un tel sous-groupe est i^{2007} , donc

$$s = 0 + i^{2008} + i^{2009} = 1+i$$

Activité 5 :

* Préciser la définition du module d'un nombre complexe et ses propriétés.

Piste de correction :

$$d) |z| = \frac{|1+ai|}{|1-ai|} = \frac{|1+ai|}{|1-ai|} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}} = 1$$

Activité 6 :

* Préciser les propriétés : $z \in R \Leftrightarrow z = \bar{z}, z_1 + z_2 = \overline{z_1 + z_2}, z^n = \overline{z^n}$

Piste de correction :

pour $z = (1+2i)^n + (1-2i)^n$ calculer Le résultat final sera z .

Activité 7 :

* Préciser la propriété : $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Piste de correction :

$$\begin{aligned} \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 + 2z + 1} \in R &\Leftrightarrow \frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 + 2z + 1} = \overline{\frac{z^2 - 2z + 1}{z^2 + 2z + 1}} \Leftrightarrow \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} = \frac{(\bar{z}-1)^2}{(\bar{z}+1)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((z-1)(\bar{z}+1))^2 = ((z+1)(\bar{z}-1))^2 \Leftrightarrow (z \cdot \bar{z} + z - \bar{z} - 1)^2 = (z \cdot \bar{z} - z + \bar{z} - 1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \square (1) \quad z \cdot \bar{z} + z - \bar{z} - 1 = z \cdot \bar{z} - z + \bar{z} - 1 \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in R, \text{ faux} \\ &\quad \square (2) \quad z \cdot \bar{z} + z - \bar{z} - 1 = -z \cdot \bar{z} + z - \bar{z} + 1 \Leftrightarrow 2z \cdot \bar{z} = 2 \Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

Activités 8 - 9 :

* Préciser les formules pour la résolution et la factorisation de l'équation de 2nd degré ;

Piste de correction :

$$8a) z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2};$$

$$8b) z_1 = 1, z_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2};$$

Remarque: pour les classes de Maths-Info, on peut traiter l'exercice tout en utilisant les racines complexes de l'unité.

8c) Factoriser ou traiter comme équation bicarrée.

$$9a) z_{1,2} = \frac{3 \pm 4i}{5}.$$

Activité 10 :

* Préciser les propriétés :

- a est un nombre imaginaire pur $\Leftrightarrow a = -\bar{a}$

- a est un nombre réel $\Leftrightarrow a = \bar{a}$

Piste de correction : On applique les propriétés ci-dessus.

Activité 11 :

* Décrire la liaison entre la forme algébrique d'un nombre complexe, sa représentation graphique et son module.

Piste de correction :

a) $z_2 = (2 + 3i)^2 = 4 - 12i - 9 = 5 - 12i \Rightarrow B(-5; -12)$. On représente les points A et B.

On demandera à l'élève de faire la liaison entre les distances OA et OB.

b) Si z_1 est à l'intérieur du cercle $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$ alors $|z_1| < \frac{1}{2}$.

Puisque $z_2 = z_1^2 \Rightarrow |z_2| = |z_1|^2 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Donc, z_2 se trouve, lui aussi, à l'intérieur du cercle.

Pour aller plus loin : Soit la suite récurrente complexe définie par $z_1 =$ un point se

trouvant à l'intérieur du cercle $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et $z_n = z_{n-1}^2$ pour tout $n \geq 2$. Expliquer le comportement de la suite quand $n \rightarrow \infty$.