Sujet pour section bilingue francophone

SESSION 2011

MATHÉMATIQUES

Sujet Type – corrigé

- DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 heure 30 –

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour cette épreuve.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

- Ce sujet comporte 4 pages -

Partie 1 : connaissances — 30 points

$1^{\text{ère}}$ partie : QCM (15 points)

Pour chaque question de cet exercice, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On pose $z = -\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$. La forme algébrique de z^2 est:

A : $-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$	B : $2\sqrt{2}$	C : $2-\sqrt{2}+i\left(2+\sqrt{2}\right)$	D : $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

2. On considère des suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n, $u_n \le v_n \le w_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $w_n = 2u_n$, alors :

A : on ne peut rien dire de la limite de (v_n).	B : (v_n) converge vers 3.	C : (w_n) tend vers $+\infty$.	D : pour tout $n \in$ IN, $u_n \ge 0$.

3. Soit f une fonction définie sur IR et F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 2$.
La primitive H de la fonction $x \mapsto f\left(x+2\right)$ qui vérifie $H(0) = 2$ est la fonction :

A : $x \mapsto F\left(x+2\right)$	B : $x \mapsto F\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)$	C : $x \mapsto F\left(x+2\right)+2-F\left(2\right)$	D : $x \mapsto F\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)+2-F(2)$

4. Les solutions de l'inéquation $1 < \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{9}{4}$ sont les réels x qui vérifient :

A : $x > 1$	B : $-2 < x < 0$	C : $0 < x < 2$	D : $x > -2$

5. On doit choisir deux villes dans une liste de huit pour désigner les extrémités d'une étape d'une course cycliste. Combien y a-t-il de choix possibles (on ne distingue pas départ et arrivée) ?

A : 16	B : 64	C : 28	D : 256

$2^{\text{ème}}$ partie : questions de cours (15 points)

Question n° 1 :
Énoncer le théorème de Weierstrass.
Soit (u_n) une suite bornée. Alors on peut en extraire une sous-suite convergente. 5 points

Question n° 2 :

1. Soit f l'application de IN dans IN définie par $f(s) = (1+s)^n$.

En développant $f(s)$ à l'aide de la formule du binôme, calculer $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

$$(1+s)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n 1^k s^{n-k} .$$

5 points

En remplaçant s par 1, on trouve $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n$.

2. En déduire le nombre de parties d'un ensemble E de cardinal n.
C'est la somme des parties à 0 élément, à 1 élément, … , à 2 éléments, soit
$\sum_{k=0}^{n} C_n^k$, c'est-à-dire 2^n d'après ce qui précède. 5 points

Partie 2 : compétences 60 points

Exercice n°1 : 15 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(0; \vec{i}; \vec{j})$ on considère les points : $A(9 ; 1)$; $B(-3 ; 5)$ et $D(6 ; 8)$.

1. **a.** Déterminer une équation de la droite (AB).
(AB) a une équation réduite de la forme $y = mx + p$.
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-1}{-3-9} = -\frac{1}{3}$$
On obtient alors $y = -\frac{1}{3}x + p$. 2,5 points
De plus, $B(-3 ; 5)$ est sur (AB), donc ses coordonnées vérifient
l'équation de cette droite : $5 = -\frac{1}{3} \times -3 + p$ et $p = 4$.
L'équation réduite de le droite (AB) est donc : $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

b. Justifier que les points A, B et D ne sont pas alignés.
Il suffit de remplacer les coordonnées de D dans l'équation de la droite (AB) :
$-\frac{1}{3} \times 6 + 4 = 2 \neq 8$ donc D n'appartient pas à (AB). 2,5 points

2. Soit H le pied de la hauteur issue de D dans le triangle ABD.
a. Calculer la longueur DH.
DH est la distance du point D à la droite (AB).
Une équation cartésienne de cette droite est : $x + 3y - 12 = 0$. 2,5 points
On obtient : $DH = \frac{|x_D + 3y_D - 12|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$.

b. En déduire l'aire du triangle ABD.
$aire(ABD) = \frac{1}{2} \times AB \times DH$ et $AB = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$. 2,5 points
On obtient alors : $aire(ABD) = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} \times \frac{9\sqrt{10}}{5} = 36$ (en unités d'aire).

3. On considère le cercle (C) d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 2 = 0$.
a. Déterminer le centre et le rayon de cercle.
$x^2 + y^2 - 6x - 6y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 20$. 2,5 points
(C) est le cercle de centre $\Omega(3 ; 3)$ et de rayon : $2\sqrt{5}$.

b. On admet qu'une équation cartésienne de la droite (BD) est : $x - 3y + 18 = 0$.
Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle (C) et de la droite (BD).
Comme $x - 3y + 18 = 0$, on a $x = 3y - 18$.
On reporte cette substitution dans l'équation développée du cercle :
$(3y - 18)^2 + y^2 - 6(3y - 18) - 6y - 2 = 0$
$9y^2 - 108y + 324 + y^2 - 18y + 108 - 6y - 2 = 0$ 2,5 points
$10y^2 - 132y + 430 = 0$
En simplifiant par 2 :

$5y^2 - 66y + 215 = 0$

Le discriminant vaut $\Delta = 56 > 0$ donc l'équation a deux racines distinctes :

$x_1 = \dfrac{33+\sqrt{14}}{5}$ et $x_2 = \dfrac{33-\sqrt{14}}{5}$.

En reportant dans $x - 3y + 18 = 0$, on obtient : $y_1 = \dfrac{9+\sqrt{14}}{5}$ et $y_2 = \dfrac{9-\sqrt{14}}{5}$.

Les coordonnées des points d'intersection du cercle (C) et de la droite (BD) sont : $\left(\dfrac{33+\sqrt{14}}{5} ; \dfrac{9+\sqrt{14}}{5}\right)$ et $\left(\dfrac{33-\sqrt{14}}{5} ; \dfrac{9-\sqrt{14}}{5}\right)$.

Exercice n°2 : 15 points

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$:, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n - 1$. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

$v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 24 = 4(\dfrac{1}{2}u_n + n - 1) - 8n - 8 + 24 = 2u_n + 4n - 4 - 8n + 16 = 2u_n - 4n + 12 = \dfrac{1}{2}u_n$;

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de 1^er^ terme $v_0 = 28$. 3 points

2. **a)** Démontrer que $\forall n \in \mathbf{N}$:, $u_n = 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

$v_n = 4u_n - 8n + 24$ donc $u_n = \dfrac{1}{4}(v_n + 8n - 24)$. À l'aide du calcul précédent, on trouve :

$u_n = 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$. 3 points

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Comme $x_n = 7(\dfrac{1}{2})^n$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{1}{2})^n = 0$.

Vu que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n - 6 = +\infty$, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$. 3 points

3. Vérifier que $\forall n \in \mathbf{N}$:, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

Comme $\forall n \in \mathbf{N}$:, $u_n = 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$, posons $x_n = 7(\dfrac{1}{2})^n$ et $y_n = 2n - 6$.

$\forall n \in \mathbf{N}$:, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique de premier terme $x_0 = 7$ et de raison $\dfrac{1}{2}$ et (y_n) une suite arithmétique de premier terme $y_0 = -6$ et de raison 2. 3 points

4. En déduire l'expression de $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

$\sum\limits_{k=0}^{n} x_k = x_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} y_k = (n+1) \times \dfrac{y_0 + y_n}{2}$; 3 points

Il vient : $\sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k = 7 \times \dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + (n+1) \times \dfrac{-6+2n-6}{2}$.

Par conséquent : $S_n = 14[1-(\frac{1}{2})^{n+1}] + (n-6)(n+1)$.

Exercice n°3 : 30 points

Partie A

On considère la fonction *g* définie sur]0 ; +∞[par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1. Étudier le sens de variation de *g*.

   g est dérivable sur]0 ; +∞[et $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x} = \frac{2}{x}(x+1)(x-1)$.

   Donc *g'* est négative sur]0 ; 1] et positive sur [1 ; +∞[. 3 points
   g est donc décroissante sur]0 ; 1] et croissante sur [1 ; +∞[.

2. En déduire le signe de *g*(*x*) sur]0 ; +∞[.
   Comme *g*(1) = 1, on en déduit que *g* est positive sur]0 ; +∞[. 2 points

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer la limite de *f* en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

   $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} + \frac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty$ car $\lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

   On en déduit que (C) admet une asymptote verticale d'équation *x* = 0. 3 points

2. **a)** Déterminer la limite de *f* en +∞.

   $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty$ car $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. 2 points

   b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C).

   $\lim_{x\to +\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$ car $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc la droite (Δ) d'équation

   $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C). 3 points

   c) Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur]0 ; +∞[.

   $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \geq 0$ si $x \geq 1/e$, $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \leq 0$ si $0 \leq x \leq 1/e$.

   (C) est au-dessus de (Δ) si *x* ≥ *e*, au-dessous sinon. 3 points

3. Étudier le sens de variation de f.
f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x}\times x-(1+\ln x)\times 1}{x^2}=\frac{x^2+2--2-\ln x}{2x^2}=\frac{g(x)}{2x^2}>0$$ car $g(x) > 0$. 3 points

Donc f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées de B.

Pour que la tangente (T) à (C) soit parallèle à (Δ), il faut avoir $f'(x)=\frac{1}{2}$,

soit $g(x) = x^2$ et $\ln x = 0$.

On a donc $x = 1$ et $f(1)=\frac{3}{2}$. 3 points

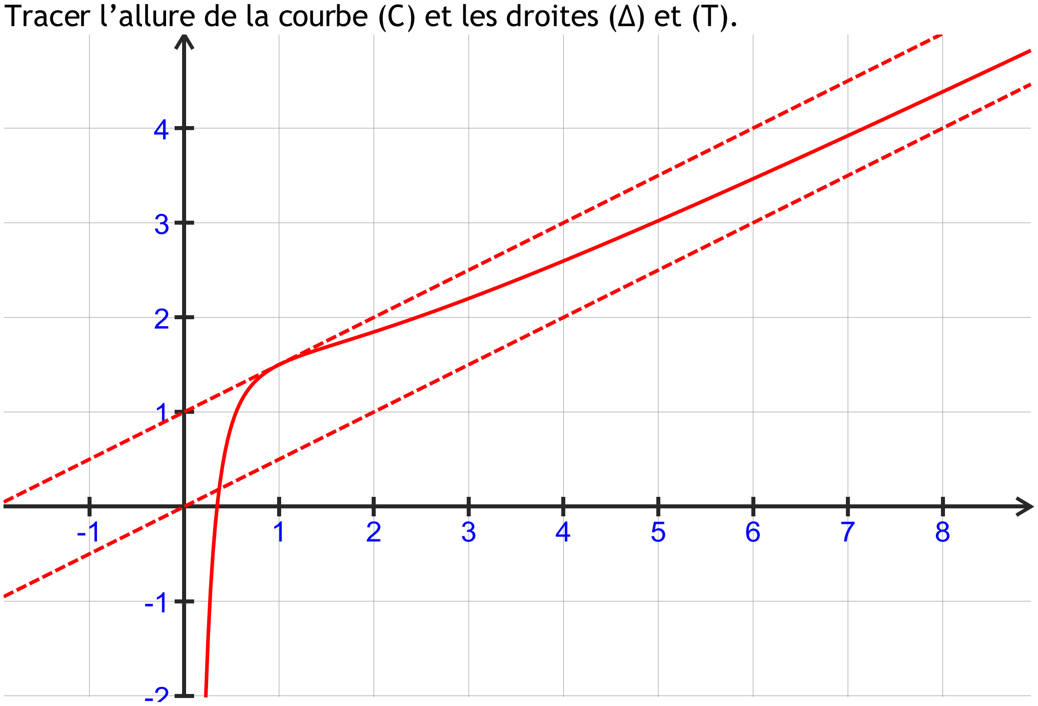
B a pour coordonnées $(1;\frac{3}{2})$.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α qui vérifie $0 < \alpha < 1/e$.
f est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, à valeurs dans IR (et $0 \in$ IR).
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty < 0$ et $f(1/e) = 1/2e > 0$ donc $0 < \alpha < 1/e$. 3 points

6. Calculer : $\int_1^e f(x)dx$.

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\,dx=\left[\frac{x^2}{4}+\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{e^2+5}{4}.$$ 3 points

7. Tracer l'allure de la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).



2 points