

Sujet pour section bilingue francophone

SESSION 2011

MATHÉMATIQUES

– DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 heure 30 –

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour cette épreuve.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

- Ce sujet comporte 3 pages -

1^{ère} partie : QCM (15 points)

Pour chaque question de cet exercice, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{z}$ est :

A : $-\frac{\pi}{3} + \theta$	B : $\frac{\pi}{3} + \theta$	C : $\frac{2\pi}{3} + \theta$	D : $\frac{2\pi}{3} - \theta$
-------------------------------	------------------------------	-------------------------------	-------------------------------

2. Les suites suivantes sont convergentes :

A : $\left(\frac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0}$	B : $\left(\frac{2n^2 + (-1)^n \sqrt{n}}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$	C : $\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n>0}$	D : $\left(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$
---	--	---	---

3. L'équation $5^x + \sqrt{25^{x+2}} = 130$ admet pour solution :

A : -1	B : pas de solution	C : 5	D : 1
--------	---------------------	-------	-------

4. Dans une trousse se trouvent un stylo bleu, deux blancs, quatre rouges indiscernables au toucher les uns des autres. On tire au hasard trois de ces stylos.

Le nombre de tirages comportant plus de rouges que de blancs est égal à :

A : 35	B : 22	C : 19	D : 15
--------	--------	--------	--------

2^{ème} partie : questions de cours (15 points)**Question n° 1 :**

On dispose de trois tiroirs pour ranger cinq pulls. Chaque tiroir peut contenir les cinq pulls.

- de combien de façons peut-on réaliser le rangement ?
- Combien y a-t-il de rangements possibles pour lesquels aucun tiroir ne reste vide ?

Question n° 2 :

Pour tout complexe z différent de i , on définit $Z = \frac{z+1}{z-i}$.

- On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$, avec x, y, X, Y réels.
Exprimer $\text{Re}(Z)$ et $\text{Im}(Z)$ en fonction de x et y .
- Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que Z soit réel.

Exercice n° 1 : 25 points

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 0$ et la relation : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$.

- 1° On admet que, pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n < 1$.
Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- 2° On considère la suite (v_n) est définie sur \mathbb{N} par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
 - a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera sa raison et son premier terme.
 - b) En déduire la limite de la suite (v_n) .
- 3°
 - a) Exprimer u_n en fonction de v_n .
 - b) En déduire le comportement à l'infini de la suite (u_n) .

Exercice n° 2 : 35 points

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.
 - a) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - b) Déterminer les asymptotes à la courbe (C).
2.
 - a) Calculer $f'(x)$.
 - b) Dresser le tableau de variations de f . Préciser $f(0)$.
3. Déterminer une équation de la tangente T_0 à (C) au point d'abscisse 0.
4.
 - a) Calculer pour tout réel x , $f(-x) + f(x)$.
 - b) Quelle propriété de symétrie de (C) peut-on déduire de la question précédente ?
 - c) Tracer l'allure de (C), ses asymptotes et la tangente T_0 .
5. Calculer : $\int_0^{\ln 2} f(x) dx$.