Sujet pour section bilingue francophone

SESSION 2011

MATHÉMATIQUES

Sujet Type

- DURÉE DE L'ÉPREUVE : 1 heure 30 –

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour cette épreuve.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

- Ce sujet comporte 4 pages -

Partie 1 : connaissances 30 points

1$^{\text{ère}}$ partie : QCM (15 points)

Pour chaque question de cet exercice, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. On pose $z = -\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$. La forme algébrique de z^2 est:

A : $-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$	B : $2\sqrt{2}$	C : $2-\sqrt{2}+i\ \ 2+\sqrt{2}$	D : $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

2. On considère des suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $w_n = 2u_n$, alors :

A : on ne peut rien dire de la limite de (v_n).	B : (v_n) converge vers 3.	C : (w_n) tend vers $+\infty$.	D : pour tout $n \in$ IN, $u_n \geq 0$.

3. Soit f une fonction définie sur IR et F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 2$.
La primitive H de la fonction $x \mapsto f\ \ x+2$ qui vérifie $H(0) = 2$ est la fonction :

A : $x \mapsto F\ \ x+2$	B : $x \mapsto F\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)$	C : $x \mapsto F\ \ x+2\ \ +2-F\ \ 2$	D : $x \mapsto F\left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) + 2 - F(2)$

4. Les solutions de l'inéquation $1 < \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{9}{4}$ sont les réels x qui vérifient :

A : $x > 1$	B : $-2 < x < 0$	C : $0 < x < 2$	D : $x > -2$

5. On doit choisir deux villes dans une liste de huit pour désigner les extrémités d'une étape d'une course cycliste. Combien y a-t-il de choix possibles (on ne distingue pas départ et arrivée) ?

A : 16	B : 64	C : 28	D : 256

2$^{\text{ème}}$ partie : questions de cours (15 points)

Question n° 1 :
Énoncer le théorème de Weierstrass.

Question n° 2 :

1. Soit f l'application de IN dans IN définie par $f(s) = (1+s)^n$.
En développant $f(s)$ à l'aide de la formule du binôme, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$.

2. En déduire le nombre de parties d'un ensemble E de cardinal n.

Partie 2 : compétences — 60 points

Exercice n°1 : 15 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(0; \vec{i}\,; \vec{j})$ on considère les points :

$A(9\ ;\ 1)$; $B(-3\ ;\ 5)$ et $D(6\ ;\ 8)$.

1. **a.** Déterminer une équation de la droite (*AB*).
   b. Justifier que les points *A*, *B* et *D* ne sont pas alignés.

2. Soit *H* le pied de la hauteur issue de *D* dans le triangle *ABD*.
   a. Calculer la longueur *DH*.
   b. En déduire l'aire du triangle *ABD*.

3. On considère le cercle (C) d'équation cartésienne : $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 2 = 0$.
   a. Déterminer le centre et le rayon de cercle.
   b. On admet qu'une équation cartésienne de la droite (*BD*) est : $x - 3y + 18 = 0$.
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle (C) et de la droite (*BD*).

Exercice n°2 : 15 points

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

On définit la suite v_n par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.

1. Démontrer que v_n est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

2. **a)** Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

   b) En déduire la limite de la suite u_n .

3. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n + y_n$ où x_n est une suite géométrique et y_n une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

4. En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n .

Exercice n°3 : 30 points

Partie A

On considère la fonction *g* définie sur]0 ; +∝[par : $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1. Étudier le sens de variation de *g*.
2. En déduire le signe de *g*(*x*) sur]0 ; +∝[.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur]0 ; +∝[par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de *f* en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. **a)** Déterminer la limite de *f* en +∝.

   b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C).

   c) Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur]0 ; +∝[.
3. Étudier le sens de variation de *f*.
4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées de B.
5. Montrer que l'équation *f*(*x*) = 0 a une unique solution α qui vérifie 0 < α < 1/*e*.
6. Calculer : $\int_1^e f(x)dx$.
7. Tracer l'allure de la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).